

# Controlador para prótesis robótica de miembro inferior considerando el efecto de saturación en los actuadores

B. Aguilar<sup>1</sup>, M. Mera<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>UPIBI-Instituto Politécnico Nacional, Av. Acueducto de Guadalupe S/N, Gustavo A Madero, CDMX

<sup>2</sup>ESIME-Instituto Politécnico Nacional, Av. Ticomán No. 600, Gustavo A. Madero, CDMX

**Resumen**—En este trabajo se presenta el procedimiento de diseño de un controlador que tome en cuenta el fenómeno de saturación en los actuadores para simular el caminar humano en una prótesis robótica de miembro inferior previamente construida. Para ello se utilizó el Método de la Elipsoide Atractiva con la Función Barrera de Lyapunov, generando una región de atracción que asegure la estabilidad del sistema y otra que asegure su convergencia al origen. Se presentan, además, los resultados obtenidos en simulaciones numéricas donde se observan tanto los parámetros utilizados como el funcionamiento del controlador para generar el movimiento en la prótesis robótica.

**Palabras clave**—Función Barrera de Lyapunov, Elipsoide Atractivo, Prótesis Robótica, Saturación del Actuador

## I. INTRODUCCIÓN

Las extremidades inferiores del ser humano se han adaptado no sólo para mantener el peso del cuerpo sino también para desplazarse por el suelo y mantener una postura bípeda y erguida única en la naturaleza (Palastanga, Field, & Soames, 2000). La bipedestación brinda al ser humano autonomía y agilidad en su entorno, sin embargo, esta capacidad se puede ver alterada o suprimida por causas congénitas, lesiones, trastornos esqueléticos o neuromusculares (Marco, 2013).

En México, el 64.1% de la población con discapacidad tiene dificultad para caminar debido a diversas causas (Instituto Nacional de Estadística y Geografía, 2015). Para estos casos surge la necesidad de desarrollar tecnologías que asistan sus limitantes tanto para rehabilitar como para reemplazar la función de las extremidades inferiores.

Generar estas tecnologías usualmente requiere de un modelo matemático con el que se puedan realizar análisis teóricos y simulaciones útiles en el proceso de diseño y control. Han sido numerosas las propuestas de control para un buen seguimiento de trayectorias manteniendo la estabilidad de elementos robóticos de miembro inferior, entre las más relevantes pueden mencionarse: el controlador Proporcional Integral Derivativo (PID), el método de torque computado (CTM) y otras más robustas como el control de modos deslizantes (SMC) (Vázquez & Ramírez, 2013). Sin embargo, este tipo de controladores no contemplan en su totalidad la restricción física que supone el efecto de la saturación en el actuador (Hu & Lin, 2001), por este motivo el presente proyecto se enfoca en diseñar un controlador para lograr el movimiento estable de una prótesis robótica

de miembro inferior considerando el efecto de saturación en los actuadores. Además, busca maximizar el área de estabilidad con el Método de la Elipsoide Atractiva (Gomes da Silva & Tarbouriech, 2005) mejorada con el uso de una Función Barrera de Lyapunov (Ren, Sam, Peng, & Heng, 2010).

## II. MODELO Y DINÁMICA DE LA PRÓTESIS ROBÓTICA

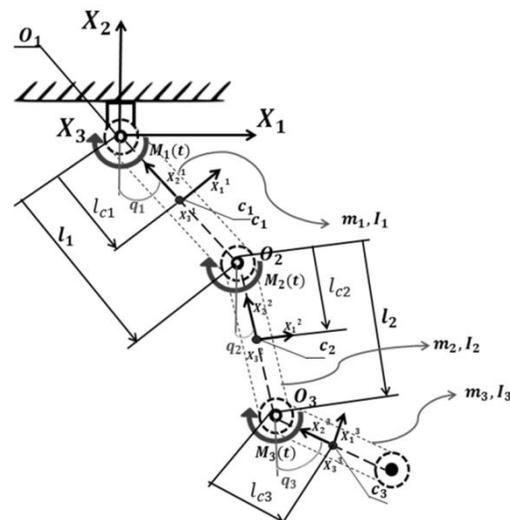


Fig.1 Diagrama de triple péndulo que representa una pierna robótica.

Para obtener un modelo matemático que describa las leyes físicas que rigen a la prótesis robótica se propuso que una pierna puede ser representada como un péndulo triple que se mueve en dos dimensiones. El modelo fue calculado con las ecuaciones Euler-Lagrange y es el siguiente:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + N(\theta)\dot{\theta}^2 + C\dot{\theta} + p(\theta) = f_e(t). \quad (1)$$

Donde  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  considera las inercias que actúan en el sistema,  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  depende de la posición del robot bípedo en el tiempo,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz de coriolis, en  $p \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  se considera la acción de la fuerza de gravedad y  $f_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es la acción del torque de los motores sobre el sistema. Además,  $\theta \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el vector de coordenadas generalizadas, es decir, los ángulos entre articulaciones ( $q_1, q_2, q_3$ ) que para efectos de cálculo son definidos como  $x_1, x_3, x_5$  mientras que las velocidades en cada articulación serán  $x_2, x_4, x_6$ .

Para diseñar el controlador es necesario representar el modelo matemático (1) mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de primer orden que se combinan en una

ecuación diferencial matricial de primer orden llamada espacio de estados. Para este cálculo se toman en cuenta los valores reales de masa y longitud del robot presentado en Venega, 2016. El espacio de estados esclarece que el sistema es No Lineal y por lo tanto se requiere ejecutar un método de linealización previo al diseño del control.

## II. DISEÑO DEL CONTROLADOR

El sistema dinámico de la prótesis robótica tiene tres entradas y tres salidas tal como se describe en (2), donde  $\dot{x}$  es la dinámica del espacio de estados calculado a partir de (1), los vectores  $g(x)$  dependen del vector de entrada del sistema  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  que físicamente son los tres motores en el robot, uno en cada junta, que proporcionarán el movimiento del mismo; además, se considera que el vector de salida será  $y$  que representa los ángulos entre articulaciones dado que por medio del control de la posición de las juntas es como se logrará simular la marcha artificial.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^3 g_i(x)u_i, \\ y &= [x_1, x_2, x_3]^T. \end{aligned} \quad (2)$$

Se utilizaron las derivadas de Lie (Isidori, 2000) para hallar una  $u$  que compense las no linealidades del sistema (2), quedando el espacio de estados de la forma lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\sigma(u) + \omega, \\ y &= x + \xi. \end{aligned} \quad (3)$$

Donde las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^n$  están definidas tal que  $(A, B)$  es controlable en el sentido de Kalman,  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^n$  es el vector de entrada,  $y \in \mathbb{R}^n$  es la señal de salida que podemos medir,  $\sigma(\cdot)$  es la función de saturación, que se define a continuación considerando  $u_{min} = -u_{máx}$ .

$$\sigma(\cdot) = \begin{cases} u_{máx} & \text{si } u \geq u_{máx} \\ u & \text{si } -u_{máx} < u < u_{máx} \\ -u_{máx} & \text{si } u \leq -u_{máx} \end{cases}$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$  es una perturbación desconocida pero acotada debida al error de medición en los sensores del robot y que, para la matriz simétrica  $Q_\xi = Q_\xi^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , cumple

$$\xi^T Q_\xi \xi \leq 1, \forall t \geq 0, \quad (4)$$

y  $\omega$  describe perturbaciones desvanecientes que provienen del error debido a la incapacidad de los actuadores de generar de manera precisa la señal de linealización, de tal manera que para las matrices definidas positivas  $Q_\omega, Q_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se cumple la siguiente desigualdad

$$\omega^T Q_\omega \omega \leq x^T Q_x x \leq 0, \forall t \geq 0. \quad (5)$$

Formalmente se considera el error debido a la saturación como  $\phi(u) = \sigma(u) - u$

$$\phi(u) = \begin{cases} u - u_{máx} & u > u_{máx} \\ 0 & -u_{máx} \leq u \leq u_{máx} \\ -u_{máx} - u & u < -u_{máx} \end{cases}.$$

Para estabilizar el sistema en lazo cerrado se propone la retroalimentación  $u = ky = kx + k\xi$ , donde  $k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es una constante de ganancia. Además, se considera una región lineal que puede definirse formalmente como

$$\mathcal{P} := \{u \in \mathbb{R}^n : -u_{máx} \leq u \leq u_{máx}\}.$$

Definimos un elipsoide parametrizado por una matriz  $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que  $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ , como

$$\varepsilon_x(\tilde{P}) := \{x \in \mathbb{R}^n : x^T \tilde{P} x \leq 1\}.$$

Este conjunto es un elipsoide asintóticamente atractivo si  $x(t, x_0) \rightarrow \varepsilon_x(\tilde{P})$ , mientras  $t \rightarrow \infty$  para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (Poznyak, Polyakov, & Azhmyakov, 2014).

El Sistema (3) a lazo cerrado se reescribe de la siguiente manera:

$$\dot{x} = (A + Bk)x + B\phi(u) + Bk\xi + \omega. \quad (6)$$

Si  $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$  es un elemento de  $\mathcal{P}$ , entonces la función  $\phi(\hat{\alpha})$  satisface la siguiente ecuación (Tarbouriech, Prieur & Da Silva)  $\delta^{-1}\phi(\hat{\alpha})^T(\phi(\hat{\alpha}) + \hat{\beta}) \leq 0$ . Considerando que  $\hat{\alpha} = kx + k\xi$  y  $\hat{\beta} = kx + k\xi + Gx$  entonces  $\delta^{-1}\phi^T(\phi + kx + k\xi + Gx) \leq 0$ , donde  $\delta^{-1} \in \mathbb{R}^+$ . Para asegurar que  $Gx$  pertenezca al conjunto  $\mathcal{P}$  se pide que  $\|Gx\|^2 \in \varepsilon(R) \subset \mathcal{P}$ , que es equivalente a la desigualdad  $\|Gx\|^2 \leq u_{máx}^2 x^T R x$ , que puede escribirse usando el complemento de Schur como

$$\begin{pmatrix} R & G^T \\ G & u_{máx}^2 \end{pmatrix} \geq 0. \quad (7)$$

Para analizar la estabilidad se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \ln\left(\frac{1}{1 - x^T R x}\right), \quad (8)$$

donde  $\ln(\cdot)$  es la función logaritmo natural y  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R = R^T > 0$  parametriza el elipsoide  $\varepsilon(R)$ .

Para garantizar que el término desconocido  $\omega$  permanece dentro del elipsoide  $\varepsilon(P)$ ,  $\forall t \geq 0$  se selecciona la matriz  $Q_x = P$ , considerando (5) esto significa que

$$\omega^T Q_\omega \omega \leq x^T P x, \quad \forall t \geq 0 \quad (9)$$

La derivada con respecto al tiempo de la función candidata (8), está dada por

$$\dot{V}(x) = \frac{2x^T R \dot{x}}{1 - x^T R x} \quad (10)$$

Para asegurar que el elipsoide  $\varepsilon(P)$  sea un conjunto acotado para cualquier solución del sistema en lazo cerrado, y considerando (4) y (9) es suficiente con que el numerador cumpla la siguiente desigualdad

$$2x^T R \dot{x} \pm \alpha x^T P x + \alpha(1 - \xi^T Q_\xi \xi) + \alpha(x^T P x - \omega^T Q_\omega \omega) - 2\delta^{-1} \phi^T (\phi + kx + Gx) \leq 0,$$

para  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  a lo largo de las soluciones del sistema en lazo cerrado. Introduciendo el vector  $\eta = [x, \phi, \xi, \omega]^T$  la desigualdad anterior es equivalente a:

$$\eta^T \Omega \eta + \alpha(1 - x^T P x) \leq 0. \quad (11)$$

Sin embargo, para obtener un controlador se deben encontrar los valores adecuados para la ganancia  $k$ , así como los valores de las matrices  $R$  y  $P$  que maximicen y minimicen los elipsoides  $\varepsilon(R)$  y  $\varepsilon(P)$  respectivamente, por ello se propone la siguiente transformación  $\Omega = T\Omega T^T$  a la desigualdad bilineal, donde

$$T = \text{diag}(R^n, \delta, R^n, I_{n \times n}),$$

se seleccionan las siguientes variables  $X_1 = P^{-1}$ ,  $X_2 = R^{-1}$ ,  $Y = kR^{-1}$ ,  $Z = GR^{-1}$  y se aplica el complemento de Schur para el término bilineal  $R^{-1}2\alpha PR^{-1}$ , finalmente

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \delta B - Y^T - Z^T & BY & I & \alpha X_2 \\ \delta B^T - Y - Z & -2\delta & Y & 0 & 0 \\ Y^T B^T & Y^T & -\alpha X_2 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -\alpha Q_\omega & 0 \\ \alpha X_2 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha X_1 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{11} = \alpha X_2 + X_2 A^T + BY + Y^T B^T,$$

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} X_2 & Z^T \\ Z & u^2_{\text{máx}} \end{pmatrix},$$

donde  $\delta$  es un término escalar positivo,  $Y$  y  $Z \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  y  $X_1$  y  $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas definidas positivas en el siguiente sistema de desigualdades lineales

$$\begin{cases} 0 < Q_\xi^{-1} < X_1 < X_2 \\ \Omega \leq 0, \Omega_1 \geq 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Si es posible encontrar valores de  $X_1$ ,  $X_2$  y  $Y$  que satisfagan (12); el control de entrada donde  $k = YX_2^{-1}$  y definiendo  $\hat{X} := X_1^{-1} - X_2^{-1}$ , entonces, cualquier trayectoria en el sistema en lazo cerrado (3) comenzando en el conjunto elipsoidal  $\varepsilon(X_2^{-1}) \subset P$  permanece en  $\varepsilon(X_2^{-1})$  para todo tiempo. Además, si las trayectorias comienzan dentro  $\varepsilon(X_2^{-1})$  convergen asintóticamente al conjunto elipsoidal más pequeño  $\varepsilon(\hat{X}^{-1}) \subset \varepsilon(X_2^{-1})$ .

El error de retroalimentación se define como la diferencia entre la trayectoria del sistema y la trayectoria teórica que se espera que el robot siga, entonces esto puede definirse como

$$e = x_p - y_d,$$

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x}_p - \dot{y}_d, \\ \ddot{e} &= \ddot{x}_p - \ddot{y}_d = (U + \omega) - \ddot{y}_d, \end{aligned}$$

donde  $x_p$  es el vector de posiciones de los ángulos del robot  $x_p = [x_1 \ x_3 \ x_5]^T$  y  $y_d \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el vector de trayectorias teóricas para cadera, rodilla y tobillo. El vector  $\dot{x}_p = [x_2 \ x_4 \ x_6]^T$  son las velocidades en los centros de masa del robot y  $\dot{y}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  son las velocidades teóricas.

La retroalimentación del error estará dada por  $v = k(e + \dot{e})$ , donde  $U$  depende de  $v$ . Finalmente el controlador tiene una parte que compensa las no linealidades y una parte que asegura el seguimiento de las trayectorias establecidas. Esto puede expresarse como

$$U = U_{\text{Linealizante}} + U_{\text{Trayectorias}}.$$

Se debe asegurar que la suma de ambas no sature la señal de control, es decir,  $\|U\| \leq \|\bar{U}_{\text{Linealizante}} + \bar{U}_{\text{Trayectorias}}\| \leq \|\bar{U}\|$ ,  $\bar{U} > U_{\text{máx}}$ . Donde  $\bar{U}_{\text{Linealizante}}$  y  $\bar{U}_{\text{Trayectorias}}$  son las cotas de cada uno de los términos, mientras que  $\bar{U}$  es el valor de saturación real en los actuadores físicos, y  $U_{\text{máx}}$  es menor que el valor de saturación real. Esto debe ser así porque únicamente  $U_{\text{Trayectorias}}$  fue considerada en el análisis para no saturar la señal.

### III. RESULTADOS

Los siguientes resultados fueron obtenidos de simulaciones numéricas en el entorno Simulink de Matlab. Se utilizaron los parámetros de la Tabla 1, y se consideraron los parámetros de dimensión y peso de un modelo a escala presentado en Venega, 2016. Se consideró  $U_{\text{máx}} < 9$ , debido a que la saturación física de los motores se alcanza en 10V.

Primeramente, se encuentra la solución para la matriz de ganancias  $k$  y la solución para las matrices  $R$  y  $P$ .

TABLA I  
PARÁMETROS DE SIMULACIÓN

Variable	Valor
$\alpha$	0.10
$\omega$	$0.50 \times \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ \sin(x_2) \\ \sin(x_3) \end{pmatrix}$
$\xi$	$0.003 \sin(t) \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Con la ganancia  $k$  se calcula la señal de control  $U = [U_1 \ U_2 \ U_3]^T$  y con las matrices  $R$  y  $P$  se graficaron los elipsoides  $\varepsilon(\hat{X}^{-1})$  y  $\varepsilon(X_2^{-1})$  utilizando el Ellipsoidal Toolbox de Matlab. Las soluciones graficadas en la elipsoide son  $e = x_p - y_d$  en el eje de las abscisas y

$\dot{e} = \dot{x}_p - \dot{y}_d$  en el eje de las ordenadas. Estas soluciones, si empiezan dentro del elipsoide grande, deben converger cerca del origen dentro del elipsoide más pequeño tal y como se muestra en la Figura 2. Con esto se asegura que mientras las condiciones iniciales del sistema se encuentren dentro del elipsoide R, convergerán a una zona de estabilidad cerca del origen dentro del elipsoide P. Cabe señalar que para el control de la prótesis se obtuvieron 3 pares de elipsoides, uno para cada junta de la pierna robótica.

Las señales de control generadas para lograr el movimiento siguiendo las trayectorias teóricas de la marcha fueron graficadas y se presentan en la Figura 3, donde se puede notar que esta señal no sobrepasa los valores de restricción para U, con lo que se asegura que no habrá saturación en los actuadores.

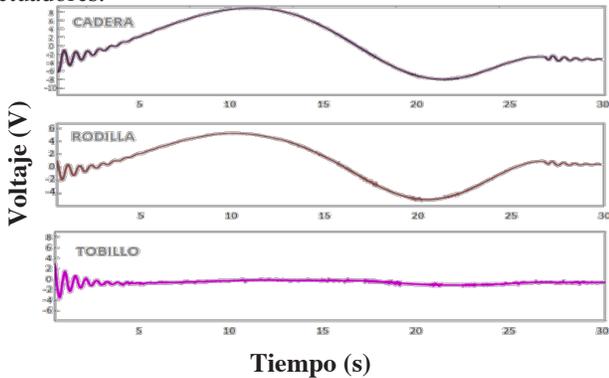


Fig.3 Señal de control para cada una de las tres articulaciones del Robot Bípedo.

Finalmente, el seguimiento de trayectorias obtenido en las simulaciones aplicando las señales de entrada de la Figura 3 se muestra en la Figura 4, donde se puede observar que la posición de las juntas converge rápidamente a las trayectorias teóricas de una pierna durante el proceso de la marcha.

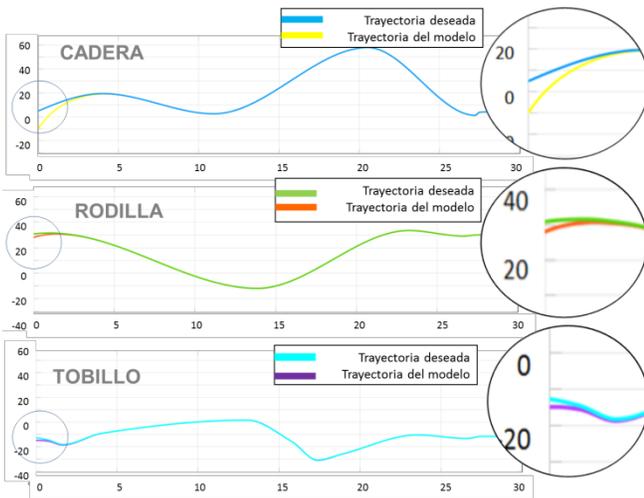


Fig.4 Seguimiento de trayectorias de cada una de las juntas de la pierna robótica.

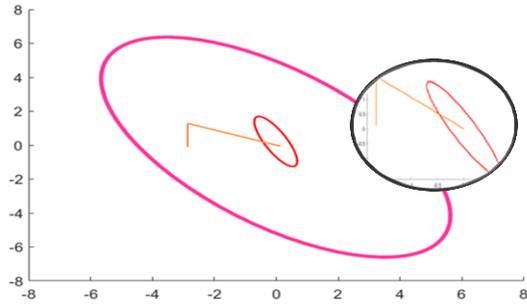


Fig.2 Elipsoides atractivos para la junta de la cadera, Elipsoide R en rosa, elipsoide P en rojo y las trayectorias en naranja.

#### IV. CONCLUSIÓN

Este trabajo generó una señal de control con una parte linealizante y una parte que asegura el seguimiento de trayectorias. Los resultados experimentales mostraron la eficacia de la señal de control de compensar las no linealidades del sistema dinámico, esto permite el correcto funcionamiento del control para el seguimiento de trayectorias por lo que se pudo simular satisfactoriamente la marcha humana en una pierna robótica.

La señal de control generada está acotada según las restricciones establecidas para no saturar a los actuadores, sin embargo, se encuentra muy por debajo de los niveles de saturación, aspecto que se debe principalmente a que se trata de un robot a escala y no de una pierna mecánica de tamaño real, además, sólo son consideradas las masas del aparato en cuestión sin considerar una carga extra.

Se pudo maximizar la región de atracción de un elipsoide y minimizar un elipsoide que garantice que las trayectorias del sistema permanecerán cerca del origen a lo largo del tiempo, por lo que el análisis propuesto con las desigualdades de matrices lineales es el adecuado para generar tanto una señal de control acotada para evitar saturación como para la optimización del comportamiento de la solución del sistema.

#### REFERENCIAS

- [1] García, J. (2017). *Teoría y ejercicios prácticos de Dinámica de Sistemas*. Barcelona .
- [2] Gomes da Silva, J., & Tarbouriech, S. (2005). *Antiwindup design with guaranteed regions of stability: An Lmi approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, 50.
- [3] Instituto Nacional de Estadística y Geografía. (2015, Diciembre 1). *INEGI*. Retrieved Marzo 2017, from <http://www.inegi.org.mx/saladeprensa/aproposito/2015/discapacidad0.pdf>
- [4] Isidori, A. (2000). *Nonlinear Control Systems*. Italy: Springer.
- [5] Marco, C. (2013). *Marcha Patológica*. *Revista del pie y tobillo*. XVII,
- [6] Mera, M., & Salgado, I. (2014). *Robust Control of Linear Systems Under Input Saturation Using Barrier Lyapunov Functions*. International Journal of Dynamics and Control.
- [7] Tarbouriech S, Prieur C, Da Silva JG (2006) Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. IEEE Transactions on Automatic Control 51(8):1364–1371
- [8] Palastanga, N., Field, D., & Soames, R. (2000). *Anatomía y movimiento del ser humano*. Barcelona: Editorial Paidotribo.
- [9] Venega, D. (2016) *Diseño, construcción y control de un exoesqueleto robótico para rehabilitación del sistema motriz y de marcha*. Instituto Politécnico Nacional, CIDETEC.