

# Algoritmo de Descomposición Ciega Basado en el Modelo de Mezcla Multi-Lineal

J. N. Mendoza Chavarría<sup>1</sup>, I. A. Cruz Guerrero<sup>1</sup>, A. R. Mejía Rodríguez<sup>1</sup>  
D. U. Campos Delgado<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, México

<sup>2</sup>Instituto de Investigación en Comunicación Óptica, Universidad Autónoma San Luis Potosí, México  
*nicolas.mendoza.ch@gmail.com*

**Abstract**—Spectral unmixing has proven to be a great tool for the analysis of hyperspectral data, with linear mixing models (LMMs) being the most used in the literature. Nevertheless, due to the limitations of the LMMs to accurately describe the multiple light scattering effects in multi and hyperspectral imaging, new mixing models have emerged to describe nonlinear interactions. In this paper, we propose a new nonlinear unmixing algorithm based on a multilinear mixture model called Non-linear Extended Blind Endmember and Abundance Extraction (NEBEAE), which is an augmentation of a previously proposed linear unmixing method established in the literature. The results of this study show that proposed method decreases the estimation errors of the spectral signatures and abundance maps, as well as the execution time with respect the state of the art methods.

**Palabras clave**—Descomposición espectral, Imágenes hiperespectrales, Modelo de Mezcla Multilineal.

## I. INTRODUCCIÓN

Las imágenes multi e hiperespectrales permiten la caracterización de una escena a través de la luz capturada en diferentes longitudes de onda. Ambas son herramientas poderosas para identificar los componentes elementales que constituyen la escena capturada y sus respectivas contribuciones o abundancias [1]. Por lo tanto, este tipo de imágenes se utiliza en distintas áreas tales como el sensado remoto, ciencias geoespaciales, ciencias planetarias, ingeniería de alimentos, ingeniería biomédica y con fines militares [2]. No obstante, identificar los componentes presentes en una escena no es una tarea sencilla, por lo que para interpretar la información presente en este tipo de imágenes se utilizan algoritmos de descomposición espectral, los cuales permiten identificar los perfiles espectrales (también llamados *endmembers*, miembros finales o componentes espectrales) de los elementos presentes en la escena y calcular sus correspondientes concentraciones de abundancias para cada píxel en la imagen. Dada la naturaleza de los materiales en la escena o el método de adquisición de la imagen, se pueden considerar distintos modelos que describen la interacción de los fotones con los elementos presentes en la muestra a analizar hasta llegar a la cámara [3].

El modelo de mezcla lineal (MML), asume que el espectro medido es consecuencia de una interacción lineal de los componentes elementales presentes en la escena [4]. Sin

embargo, este acercamiento de primer orden resulta insuficiente para describir correctamente las interacciones más complejas que realizan los fotones antes de incidir en la cámara [4], por lo tanto, es necesario recurrir a un modelo de mezcla no lineal (MMN). Diversos modelos MMN se han propuesto para solventar este problema, por ejemplo, el modelo de Fan et al. [5], el modelo generalizado bilineal (GBM, por sus siglas en inglés) [6], modelo de mezcla polinomial post no-lineal (PPNM, por sus siglas en inglés) [7], y el modelo de mezcla multilineal (MMM, por sus siglas en inglés) [8]. En especial, el MMM puede tomarse como una extensión de PPNM y GBM al poder incluir todo tipo de interacciones entre los perfiles, más la ventaja de utilizar un solo parámetro para cuantificar el aporte no-lineal de la interacción óptica por cada píxel.

En este trabajo, se propone una nueva metodología para abordar el problema de la descomposición espectral con un modelo MMM, pero con un enfoque ciego; es decir se requieren estimar de forma simultánea tantos componentes espectrales elementales, sus abundancias y el nivel de interacción no-lineal por píxel. La propuesta de estimación se basa en el algoritmo de extracción de abundancias y componentes elementales ciego extendido (EBEAE, por sus siglas en inglés) [9], al considerar interacciones multilineales, nombrándolo por sus siglas en inglés *Non-linear Extended Endmember and Abundance Extraction* (NEBEAE). Desde el punto de vista de la ingeniería biomédica, y en específico de aplicaciones de imagenología médica con información multi o hiperespectral [12], NEBEAE permitirá una cuantificación más precisa de las firmas espectrales de los componentes de la muestra y sus contribuciones espaciales.

## II. METODOLOGÍA

### A. Descripción del Modelo

Primeramente, se asumen  $K$  mediciones vectoriales positivas a través de  $L$  bandas espectrales de información:  $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^L$  con  $k \in [1, K]$  y así como un modelo MMM [8] para representar los datos observados:

$$\mathbf{z}_k = (\mathbf{1} - \mathbf{d}_k) \sum_{n=1}^N \beta_{k,n} \mathbf{p}_n + d_k \sum_{n=1}^N \beta_{k,n} \mathbf{z}_k \odot \mathbf{p}_n + \mathbf{v}_k, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^L$  indica el n-ésimo miembro final,  $\beta_{k,n} \geq 0$  representa su contribución espacial en la  $k$ -ésima observación, el producto Hadamard está representado por el operador  $\odot$ ,  $\mathbf{v}_k$  indica el vector de ruido asociado a la medición y finalmente  $d_k \in (-\infty, 1]$  define el nivel de interacción no lineal. Para evitar problemas de escalamiento se normaliza el conjunto de mediciones  $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_K\}$  para que cada vector tenga solo elementos positivos y su suma sea uno, por lo tanto:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{z}_k / \omega_k, \quad \omega_k \triangleq \mathbf{1}_L^\top \mathbf{z}_k \quad (2)$$

$$\mathbf{1}_L^\top \mathbf{y}_k = 1, \quad \forall k \in [1, K], \quad (3)$$

donde  $\mathbf{1}_L$  describe un vector  $L$ -dimensional donde todos sus elementos son 1. Además, se asumen miembros finales normalizados y con suma a uno:

$$\mathbf{1}_L^\top \mathbf{p}_n = 1 \quad \forall n \in [1, N]. \quad (4)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{y}_k = (\mathbf{1} - d_k) \sum_{n=1}^N \alpha_{k,n} \mathbf{p}_n + d_k \sum_{n=1}^N \alpha_{k,n} \mathbf{p}_n \odot \mathbf{z}_k + \mathbf{w}_k \quad \forall k \in [1, K], \quad (5)$$

donde  $\mathbf{w}_k \triangleq \mathbf{v}_k / \omega_k$ ,  $\alpha_{k,n} \triangleq \beta_{k,n} / \omega_k$  y se define el vector  $\boldsymbol{\alpha}_k = [\alpha_{k,1} \dots \alpha_{k,n}]^\top$  para la condición de normalización:

$$\mathbf{1}_L^\top \mathbf{y}_k = (\mathbf{1} - d_k) \sum_{n=1}^N \alpha_{k,n} \mathbf{1}_L^\top \mathbf{p}_n + d_k \sum_{n=1}^N \alpha_{k,n} \mathbf{1}_L^\top (\mathbf{p}_n \odot \mathbf{z}_k) + \mathbf{1}_L^\top \mathbf{w}_k \quad (6)$$

$$\mathbf{1}_L^\top \mathbf{y}_k = (\mathbf{1} - d_k) \sum_{n=1}^N \alpha_{k,n} + d_k \sum_{n=1}^N \alpha_{k,n} \langle \mathbf{p}_n, \mathbf{z}_k \rangle, \quad (7)$$

asumiendo  $\mathbf{1}_L^\top \mathbf{w}_k \approx 0$ , y agrupando términos:

$$\sum_{n=1}^N [1 - d_k + d_k \langle \mathbf{p}_n, \mathbf{z}_k \rangle] \alpha_{k,n} \triangleq 1. \quad (8)$$

Al definir el vector

$$\boldsymbol{\delta}_k = (\mathbf{1} - d_k) \mathbf{1}_N + \mathbf{P}^\top \mathbf{z}_k, \quad (9)$$

sustituyendo (9) en (8), se debe cumplir

$$\boldsymbol{\delta}_k^\top \boldsymbol{\alpha}_k = \left( (\mathbf{1} - d_k) \mathbf{1}_N^\top + d_k \mathbf{z}_k^\top \mathbf{P} \right) \boldsymbol{\alpha}_k = 1 \quad (10)$$

donde  $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_N] \in \mathbb{R}^{L \times N}$  corresponde a la matriz de componentes espectrales elementales. El modelo de observación se puede describir tomando la notación vectorial como:

$$\mathbf{y}_k = (\mathbf{1} - d_k) \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}_k + d_k (\mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}_k) \odot \mathbf{z}_k + \mathbf{w}_k \quad (11)$$

Una vez obtenida una condición de normalización con el modelo MMM, se formula el problema de síntesis tomando como base EBEAE [9]. De esta manera, se sustituye el componente relacionado al error de estimación, conservando

los elementos relacionados a la entropía normalizada de las abundancias y el de similitud de los perfiles. Estableciendo el problema de síntesis de la siguiente manera:

$$\min_{\{\alpha_k\}_{k=1}^K, \mathbf{P}, \{d_k\}_{k=1}^K} \frac{1}{2K} \sum_{k=1}^K \frac{\|\mathbf{y}_k - (\mathbf{1} - d_k) \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}_k - d_k (\mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}_k) \odot \mathbf{z}_k\|^2}{\|\mathbf{y}_k\|^2} - \frac{\mu}{2K} \sum_{k=1}^K \|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2 + \frac{\rho}{2\vartheta} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=n+1}^N \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_j\|^2, \quad (12)$$

tal que:

$$\boldsymbol{\alpha}_k \geq 0 \quad \& \quad \boldsymbol{\delta}_k^\top \boldsymbol{\alpha}_k = 1, \quad \forall k \in [1, K], \quad (13)$$

$$\mathbf{p}_n \geq 0 \quad \& \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{p}_n = 1, \quad \forall n \in [1, N], \quad (14)$$

donde  $\|\cdot\|$  indica la norma Euclidiana,  $\rho \geq 0$  y  $\mu \geq 0$  son hiper-parámetros que regulan el peso en la entropía entre abundancias y la similitud en los perfiles respectivamente. Finalmente  $\vartheta$  es una variable de normalización cuyo valor es: 1 en el caso  $N = 2$  y  $\vartheta \triangleq 1 + \dots + (N - 1)$  para todo  $N > 2$ .

El problema de optimización en (12) se puede resolver mediante un algoritmo de descenso cíclico coordinado en bloque (CCDA) [10], el cual nos permite separar la función de costo en (12) en tres sub-problemas de optimización: i) las abundancias normalizadas  $\{\alpha_k\}_{k=1}^K$ , ii) el índice de interacción no-lineal  $\{d_k\}_{k=1}^K$ , iii) la matriz de componentes elementales  $\mathbf{P}$ . Para solucionar estos subproblemas se emplea en cada bloque un enfoque de optimización cuadrática restringido, el cual consiste en fijar dos variables mientras se optimiza la restante.

Para resolver el primer subproblema, se fijan los valores de  $\mathbf{P}$  y  $\{d_k\}_{k=1}^K$ , con estas consideraciones se puede reformular (12) y estimar de manera independientemente las abundancias para cada  $k$ -observación. Además, se agregan multiplicadores de Lagrange para mantener las restricciones de (13) y obtener los puntos críticos a través de igualar a cero las derivadas parciales. Como primer paso,  $\mathbf{P}$  se inicializa mediante un algoritmo de estimación de componentes elementales, como por ejemplo el análisis de compontes del vertex (VCA, por sus siglas en inglés) [11] y  $d_k = 0 \quad \forall k$ . El segundo subproblema se aborda dejando fijo  $\{\alpha_k\}_{k=1}^K$  y  $\mathbf{P}$ , dado que no se contemplan interacciones entre observaciones en (12), se pueden calcular de manera independiente cada nivel de interacción no-lineal  $d_k$  y se obtiene el optimó al igualar el gradiente de la función de costo a cero. Como último paso se aplica una función de proyección para limitar  $d_k \in (-\infty, 1]$ . Finalmente, para atacar el tercer subproblema se fijan  $\{\alpha_k\}_{k=1}^K$  y  $\{d_k\}_{k=1}^K$ , enseguida para resolver la función de costo resultante se toma una estrategia de optimización por descenso de gradiente para actualizar la matriz  $\mathbf{P}$ , tomando el tamaño de paso obtenido a partir de encontrar el óptimo por una búsqueda lineal [10].

### III. RESULTADOS

Para evaluar el desempeño de NEBEAE se realizaron pruebas de Monte Carlo con 30 realizaciones a partir de una base de datos sintética, la cual simula imágenes hiperespectrales de visible y cercano infrarrojo (VNIR, por

sus siglas en inglés) de 60 píxeles  $\times$  60 píxeles con 129 bandas espectrales. Los componentes elementales para generar la base sintética se obtuvieron a partir de [12], simulando firmas espectrales de tejido biológico. Las imágenes se construyeron bajo un modelo MMM [8] a partir de cuatro componentes elementales. El índice de interacción no-lineal  $d_k$  se fijó en 0.5 con el objetivo de evaluar el desempeño de los algoritmos en un escenario más exigente que el originalmente propuesto de 0.3 en [8]. Además, la evaluación se realizó con distintos niveles de relación señal a ruido para un componente Gaussiano (SNR, por sus siglas en inglés), y relación nivel pico a ruido (PSNR, por sus siglas en inglés) asociado a un componente de tipo de ruido *shot* o Poisson.

Los índices de desempeño a evaluar se formularon con respecto al error de estimación de los datos (EE), error de estimación de los componentes elementales (ECE) y error en estimación de abundancias (EA). Aunado a lo anterior, se tomó en cuenta el tiempo de cómputo en segundos. Los índices EE, ECE y EA se definen de la siguiente manera:

$$EE = \frac{\|\mathbf{Z} - \hat{\mathbf{Z}}\|_F}{\|\mathbf{Z}\|_F}, \quad (15)$$

$$EA = \min_{\forall \alpha \in \mathcal{A}, \forall \hat{\alpha} \in \hat{\mathcal{A}}} \|\alpha - \hat{\alpha}\|, \quad (16)$$

$$ECE = \min_{\forall p \in P, \forall \hat{p} \in \hat{P}} \|p - \hat{p}\|, \quad (17)$$

donde  $\|\cdot\|_F$  representa la norma Frobenius,  $\mathbf{Z}$  y  $\hat{\mathbf{Z}}$  las matrices de mediciones sin escalamiento real y estimada, respectivamente,  $\mathcal{A}$  y  $\hat{\mathcal{A}}$  denotan los conjuntos de los renglones de las matrices de abundancias reales y estimadas, respectivamente, por último  $P$  y  $\hat{P}$  los conjuntos de los componentes elementales reales y estimados.

NEBEAE se comparó con tres metodologías dentro del estado del arte. La primera metodología a comparar es EBEAE con los componentes elementales inicializados con VCA [11]. La segunda metodología nombrada MLM propuesta por Q. Wei et al. en [13], la cual corresponde a un algoritmo de descomposición ciega [1], basado en MMM y con inicialización por VCA. La tercera metodología nombrada G-MLM propuesta por M. Li et al. en [14], la cual es un algoritmo semisupervisado [1], basado en MMM y que utiliza grafos regularizadores para mejorar la estimación de abundancias y las interacciones no-lineales. Además G-MLM divide la imagen en superpíxeles para reducir los tiempos de cómputo. La estimación de los componentes elementales se realizó mediante VCA y para la asignación de los superpíxeles, se utilizó la función *superpixels* de Matlab. Las implementaciones de todos los algoritmos se realizaron usando Matlab 2018a y en una computadora con procesador Intel Core i5 a 1.4 Ghz.

Las Tablas I a IV presentan el desempeño de los distintos algoritmos a diferentes valores de SNR y PSNR tomando como referencia valores en [9]. La Tabla I describe los resultados con niveles de ruido más bajos, es decir SNR de 60 dB y PSNR de 45 dB. Enseguida, los niveles de ruido van aumentando en cada tabla, teniendo valores de SNR de 57.5 dB, 55 dB y 52.5 dB para las Tablas II, III y IV

respectivamente; y los valores de PSNR en la Tabla II, III y IV tienen un valor de 42.5 dB, 40 dB y 37.5 dB respectivamente. Los resultados tienen el formato de valor medio  $\pm$  desviación estándar (std), donde los valores resaltados en azul indican el mejor desempeño por prueba. En las Fig. 1 y 2, se muestran los resultados del cálculo de abundancias a los distintos niveles de ruido descritos anteriormente tomados de una realización de Monte Carlo.

TABLA I  
RESULTADOS DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL SNR 60 dB Y PSNR 45 dB

	EE	EA	ECE	Tiempo (s)
EBEAE	0.0151 $\pm$ 0.0012	4.41 $\pm$ 0.81	0.0020 $\pm$ 0.001	0.87 $\pm$ 0.2
NEBEAE	0.0118 $\pm$ 0.0001	4.35 $\pm$ 1.10	0.0017 $\pm$ 0.002	4.89 $\pm$ 0.68
MLM	0.0155 $\pm$ 0.0061	8.15 $\pm$ 2.23	0.0037 $\pm$ 0.002	15.73 $\pm$ 13.8
G-MLM	0.3637 $\pm$ 0.0060	8.73 $\pm$ 1.23	0.0035 $\pm$ 0.002	35.3 $\pm$ 30.9

TABLA II  
RESULTADOS DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL SNR 57.5 dB Y PSNR 42.5 dB

	EE	EA	ECE	Tiempo (s)
EBEAE	0.0201 $\pm$ 0.001	4.06 $\pm$ 0.74	0.0020 $\pm$ 0.0018	0.51 $\pm$ 0.12
NEBEAE	0.0200 $\pm$ 0.001	4.28 $\pm$ 0.62	0.0018 $\pm$ 0.0005	4.1381 $\pm$ 1.24
MLM	0.0215 $\pm$ 0.0004	8.40 $\pm$ 0.43	0.0018 $\pm$ 0.0003	16.57 $\pm$ 11.35
G-MLM	0.3639 $\pm$ 0.0045	9.06 $\pm$ 0.85	0.0025 $\pm$ 0.0005	46.20 $\pm$ 39.19

TABLA III  
RESULTADOS DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL SNR 55 dB Y PSNR 40 dB

	EE	EA	ECE	Tiempo (s)
EBEAE	0.0358 $\pm$ 0.004	5.71 $\pm$ 0.087	0.0031 $\pm$ 0.0016	0.51 $\pm$ 0.1
NEBEAE	0.0348 $\pm$ 0.0002	5.37 $\pm$ 1.04	0.0020 $\pm$ 0.01	2.77 $\pm$ 0.85
MLM	0.0357 $\pm$ 0.0003	8.36 $\pm$ 0.47	0.0019 $\pm$ 0.0006	10.51 $\pm$ 3.2
G-MLM	0.3661 $\pm$ 0.0081	8.88 $\pm$ 0.70	0.0022 $\pm$ 0.0002	54.1 $\pm$ 11.0

TABLA IV  
RESULTADOS DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL SNR 52.5 dB Y PSNR 37.5 dB

	EE	EA	ECE	Tiempo (s)
EBEAE	0.0630 $\pm$ 0.002	7.38 $\pm$ 0.43	0.0037 $\pm$ 0.0012	0.36 $\pm$ 0.11
NEBEAE	0.0614 $\pm$ 0.001	7.22 $\pm$ 0.92	0.0024 $\pm$ 0.0010	2.09 $\pm$ 0.39
MLM	0.6240 $\pm$ 0.0017	9.00 $\pm$ 1.1	0.0025 $\pm$ 0.0005	15.82 $\pm$ 5.2
G-MLM	0.3640 $\pm$ 0.0073	8.91 $\pm$ 0.73	0.0026 $\pm$ 0.0011	57.5 $\pm$ 7.4

#### IV. DISCUSIÓN

Al observar las Tablas I-IV, lo primero que destaca es que la estimación mediante EBEAE genera un resultado sumamente rápido. Sin embargo, NEBEAE reduce drásticamente los tiempos de cómputo en comparación de MLM y G-MLM, que son algoritmos también basados en el modelo MMM. En cuanto a los demás índices de desempeño, NEBEAE presenta en todos los casos el mejor desempeño en EE, y con respecto a EA y ECE se obtiene el mejor desempeño en tres de las cuatro pruebas.



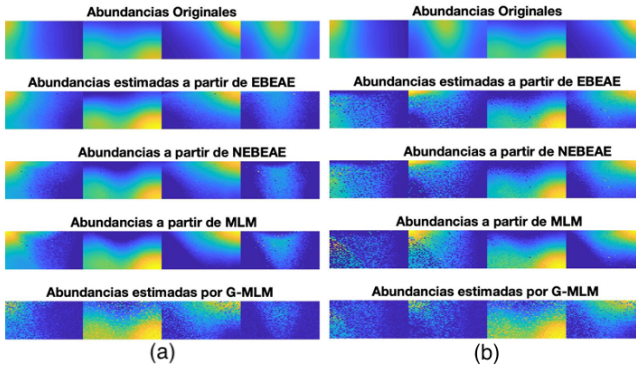


Fig. 1. Mapas de abundancias a partir de una realización de Monte Carlo aplicado la imagen sintética para diferentes pares (SNR/PSNR), a) (60,45) dB, y b) (57.5,42.5) dB.

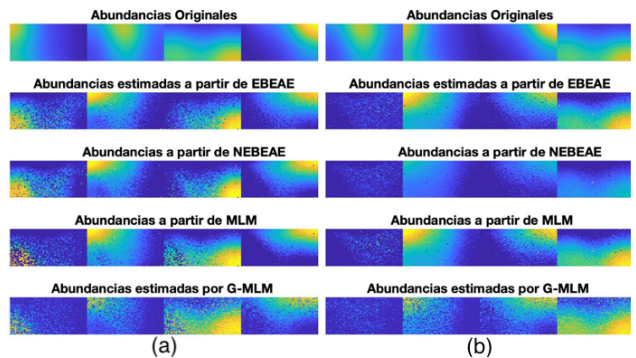


Fig. 2. Mapas de abundancias a partir de una realización de Monte Carlo aplicado la imagen sintética para diferentes pares (SNR/PSNR), a) (55,40) dB, y b) (52.5,37.5) dB.

Al comparar los distintos mapas de abundancias de las Fig. 1 y 2 se puede observar que en todos los casos los mapas se distorsionan conforme el nivel de ruido aumenta, llegando a perder considerablemente la aportación de un componente elemental en el caso del mayor nivel de ruido. También se observa que el resto de los mapas obtenidos por NEBEAE son similares a los obtenidos por los distintos algoritmos presentes en la literatura, pero como se muestra en el índice EA en Tablas I a IV, con mejor precisión en la estimación en promedio.

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó la validación sintética de un algoritmo de descomposición ciega no lineal basado en el modelo de mezcla multilínea, lo cual permite tomar en cuenta distintos niveles de interacciones entre componentes elementales bajo un único parámetro. Además al ser una extensión del algoritmo EBEAE hereda sus ventajas como el espacio reducido de búsqueda al contar con abundancias normalizadas y el adicionar términos para tomar en consideración la entropía entre abundancias y similitud entre perfiles. Los resultados obtenidos de la evaluación de Monte Carlo demostraron que este método propuesto presenta mejoría respecto a las estimaciones de los componentes elementales, abundancias y reconstrucción de los datos. Tal como se esperaba, los tiempos de ejecución de NEBEAE no lograron superar los producidos por EBEAE sin embargo, se logró reducir de manera considerable los tiempos de

ejecución con respecto los algoritmos de comparación presentes en la literatura que se basan en el modelo de mezcla multi-lineal.

Algunas aplicaciones biomédicas de la descomposición espectral son: el análisis quimiométrico en muestras de cavidad oral a partir de imágenes hiperespectrales de microscopía de tiempo de vida de imagen fluorescente [9]; la identificación de macrófagos en muestras de arterias post-mortem a partir de imágenes de tomografía de coherencia óptica [9]; y la clasificación de tejido cerebral in vivo e identificación de tumores a partir de imágenes tipo VNIR [9] [12]. No obstante, estas aplicaciones se han basado únicamente en MML, por lo que un acercamiento no-lineal como lo es NEBEAE podría dar mejores estimaciones y el componente de interacción no lineal brinda información adicional de las interacciones ópticas presentes en cada aplicación particular.

## REFERENCIAS

- [1] N. Keshava, J. and F. Mustard, "Spectral Unmixing," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 19, no. 1, pp. 44-57, Jan 2002, DOI. 10.1109/79.974727.
- [2] J. M. Bioucas-Dias *et al.*, "Hyperspectral Unmixing Overview: Geometrical, Statistical, and Sparse Regression-Based Approaches," *IEEE J Sel Top Appl Earth Obs Remote Sens.*, vol. 5, no. 2, pp. 354-379, Apr, 2012, DOI. 10.1109/JSTARS.2012.2194696.
- [3] N. Dobigeon, J. Tourneret, C. Richard, J. C. M. Bermudez, S. McLaughlin and A. O. Hero, "Nonlinear Unmixing of Hyperspectral Images: Models and Algorithms," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 31, no. 1, pp. 82-94, Jan, 2014, DOI. 10.1109/MSP.2013.2279274.
- [4] N. Dobigeon, Y. Altman, N. Brun and S. Moussaoui, "Chapter 6- linear and nonlinear unmixing in hyperspectral imaging," in *Resolving Spectral Mixtures*, 1st ed. Cambridge, Massachusetts, USA: Elsevier, 2016, ch.6 pp.185-224.
- [5] W. Fan, B. Hu, J. Miller and M. Li, "Comparative study between a new nonlinear model and common linear model for analysing laboratory simulated-forest hyperspectral data," *Int. J. Remote Sens.*, vol 30, no. 11, pp. 2951-2962, Jun, 2019, DOI. 10.1080/01431160802558659.
- [6] A. Halimi, Y. Altmann, N. Dobigeon and J. Tourneret, "Nonlinear Unmixing of Hyperspectral Images Using a Generalized Bilinear Model," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 49, no. 11, pp. 4153-4162, Nov, 2011, DOI. 10.1109/TGRS.2010.2098414.
- [7] Y. Altmann, A. Halimi, N. Dobigeon and J. Tourneret, "Supervised Nonlinear Spectral Unmixing Using a Postnonlinear Mixing Model for Hyperspectral Imagery," *IEEE Trans Image Process.*, vol. 21, no. 6, pp. 3017-3025, Jun, 2012, DOI. 10.1109/TIP.2012.2187668.
- [8] R. Heylen and P. Scheunders, "A Multilinear Mixing Model for Nonlinear Spectral Unmixing," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 54, no. 1, pp. 240-251, Jan, 2016, DOI
- [9] D. U. Campos-Delgado *et al.*, "Extended Blind End-Member and Abundance Extraction for Biomedical Imaging Applications," *IEEE Access*, vol. 7, pp.178539-178552, Dec, 2019, DOI.10.1109/ACCESS.2019.2958985.
- [10] D. G. Luenberger and Y. Ye, *Linear and nonlinear programming*. Springer, 3rd ed., 2008.
- [11] J. Nascimento and J. Dias, "Vertex component analysis: a fast algorithm to unmix hyperspectral data," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 43, no. 4, pp. 898-910, Apr, 2005, DOI. 10.1109/TGRS.2005.844293
- [12] I. A. Cruz-Guerrero, R. Leon, D. U. Campos-Delgado, S. Ortega, H. Fabelo, and G. M. Callico, "Classification of Hyperspectral In Vivo Brain Tissue Based on Linear Unmixing," *Applied Sciences*, vol. 10, no. 16, p. 5686, Aug, 2020. DOI. 10.3390/app10165686
- [13] Q. Wei, M. Chen, J. Tourneret and S. Godsill, "Unsupervised Nonlinear Spectral Unmixing Based on a Multilinear Mixing Model," *IEEE Trans. Geosci Remote Sens.*, vol. 55, no. 8, pp. 4534-4544, Aug, 2017, DOI.10.1109/TGRS.2017.2693366.
- [14] M. Li, F. Zhu, A. Guo, and J. Chen, "A Graph Regularized Multilinear Mixing Model for Nonlinear Hyperspectral Unmixing," *Remote Sensing*, vol. 11, no. 19, p. 2188, Sep, 2019 DOI. 10.3390/rs11192188