dx.doi.org/10.24254/CNIB.14.13

El problema de unicidad de la identificación de anomalías en el cerebro a partir del EEG.

M.M. Morín-Castillo[1], J.J. Oliveros-Oliveros[2], F.A. Aquino Camacho[2], A. Fraguela-Collar[2]
[1]Facultad de Ciencias de la Electrónica, BUAP, Puebla México
[2]Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, México

Resumen— **La conductividad de lesiones cerebrales varía con diferentes situaciones patológicas que se presentan tales como edemas, calcificaciones y tumores. En este trabajo se analiza el problema de unicidad de la solución del problema inverso de identificación de patologías. Para ello se utiliza un modelo que considera a la cabeza dividida en capas conductoras y dos problemas de contorno que se obtienen de diferentes consideraciones. La unicidad se obtiene con uno de los modelos pero no con el otro.**

Palabras clave—**Problema Inverso, edemas, calcificaciones.**

I. Introducción

La Electroencefalografía es una de las principales técnicas de estudio del cerebro teniendo su mayor aportación en la detección de la epilepsia. El registro del Electroencefalograma en el cuero cabelludo (EEG) corresponde al potencial generado por grandes conglomerados de neuronas trabajando simultáneamente llamados generadores del EEG o fuentes bioeléctricas. Estas fuentes pueden estar localizadas en el volumen o en la corteza cerebral. Entre las ventajas de la técnica del EEG se encuentran que la información que proporciona se captura en tiempo real, de manera simple, es no destructiva y económica. El problema de determinar las fuentes a través del EEG es llamado Problema Inverso Electroencefalográfico y cae dentro de la categoria de los problemas mal planteados. Esto es debido a que existen diferentes configuraciones que pueden producir el mismo EEG y a que pequeñas variaciones en los datos de entrada pueden producir variaciones sustanciales en la localización de la fuente. Por medio de esta técnica se han detectado posibles anomalías en el cerebro. En este trabajo consideramos el caso de tumores, edemas y calcificaciones y se estudia el problema de unicidad de la identificación de estas anomalías a partir del EEG.

II. Modelo matemático

El modelo matemático que se presenta en este trabajo ha sido ampliamente utilizado para el estudio del problema de identificación en ([1], [2] [3], [4], [5]); en él la cabeza humana ha sido modelada por medio de capas conductoras con conductividad constante y diferente en cada capa. La actividad eléctrica del cerebro es registrada en el cuero cabelludo por medio del EEG. La conductividad eléctrica de lesiones cerebrales varía con la situación patológica tal como edemas y calcificaciones. Veamos el caso de tumores. Se sabe que estos son silencio eléctrico. Sin embargo, una corriente eléctrica secundaria puede generarse alrededor del tumor. Es decir, en nuestro contexto, una fuente eléctrica de actividad cerebral anormal podría ser generada alrededor de tumores cerebrales dando lugar a EEG anormal [6]. En la frontera que separa al cerebro sano de la parte dañada ya no pueden considerarse las condiciones de transmisión (igualdad de los potenciales y de los flujos de corriente) por la aparición de estas corrientes. Además, donde está localizado el tumor no hay fuentes bioeléctricas por lo que ya no se satisface la ecuación de Poisson sino la ecuación de Laplace. En este caso, el problema inverso consiste en determinar a la mencionada corriente secundaria a partir del EEG sobre el cuero cabelludo. Nótese que en este caso debemos determinar de la mencionada corriente, no sólo su regla de correspondencia sino también su dominio, es decir, la superficie que separa al cerebro sano del dañado. Por lo tanto, tenemos dos incógnitas. Esto lleva a un resultado de no unicidad del problema inverso. Si despreciamos la actividad de fuentes bioeléctricas tanto volumétricas como corticales, el problema de contorno que se satisface es el siguiente:

$$\Delta u_0 = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_0, \tag{1}$$

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_1, \tag{2}$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_2, \tag{3}$$

$$u_0 = u_1 \quad \text{en} \quad S_0, \tag{4}$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0}{\partial n_0} = \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_0} + j^p \cdot n_0 \quad \text{en} \quad S_0, \tag{5}$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en} \quad S_1, \tag{6}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{en} \quad S_1, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \quad \text{en} \quad S_2. \tag{8}$$

donde $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ representa a la cabeza, Ω_0 la región de la anomalía, Ω_1 el cerebro, Ω_2 el resto de las capas que componen la cabeza (líquido intracraneal, cráneo, cuero cabelludo), σ_0, σ_1 y σ_2 son las conductividades de Ω_0, Ω_1 y Ω_2, $u_i = u|_{\Omega_i}$ $i = 1,2$ y u representa al potencial eléctrico en Ω. El símbolo Δ representa al operador laplaciano, que también se simboliza como ∇^2.

De las fórmulas de Green se deduce la siguiente condición de compatibilidad

$$\int_{S_0} j^p(x) \cdot n_0(x)\, dx = 0. \tag{9}$$

En lo que sigue usaremos la notación $\varphi = j^p \cdot n_0$.

Aquí suponemos que la componente normal de la corriente φ es diferente de cero. El caso en el que es nula será considerado más abajo.

En la siguiente sección se estudiará el problema de identificar a la fuente φ usando el problema (1)-(8) y la condición:

$$u_2|_{S_2} = V.$$

III. RESULTADOS CONOCIDOS

En el caso en el que conocemos a la región Ω_0 y por ende a su frontera $\partial\Omega_0$, se tiene el siguiente resultado [5].

Dada una medición V sobre S_2 existe una única fuente φ (salvo constantes) que satisface la condición (9) que la produce.

La demostración presentada en la referencia [5] utiliza técnicas de la teoría de potencial. Aquí damos una demostración diferente.

Supongamos que existen dos fuentes $\widehat{\varphi}$ y $\tilde{\varphi}$ que producen los potenciales $\widehat{u}$ y $\tilde{u}$ respectivamente y que generan la misma medición V . Sea $u = \widehat{u} - \tilde{u}$. Tenemos entonces que u es armónica en Ω_2 y que satisface sobre S_2 las condiciones de frontera $\frac{\partial u}{\partial n_2} = 0$ y $u = 0$. Estos son conocidos como datos de Cauchy. Debido a la unicidad de solución de este problema se halla que u es cero en Ω_2 . Restringiendo u en S_1 hallamos que es armónica en $\Omega_1 - \Omega_0$, la región sana del cerebro, que los datos de Cauchy sobre S_1 son nulos. De esta forma se halla que u es cero en $\Omega_1 - \Omega_0$. Tomando en cuenta que u es armónica en Ω_0 y sobre $\partial\Omega_0$ es nula, se concluye, por el principio del máximo para funciones armónicas, que es nula en todo Ω_0 . Aplicando la condición de frontera (5) relativa a los flujos de corriente se concluye que $\tilde{\varphi} = \widehat{\varphi}$. Esto termina la prueba.

En particular, este resultado garantiza que las fuentes sobre la corteza cerebral pueden determinarse de manera única a partir del EEG sobre el cuero cabelludo.

IV. RESULTADO DE NO UNICIDAD

El resultado de unicidad anterior no permite hallar la región Ω_0 o su frontera, la cual al ser cerrada, define a la región completamente. Esto es porque suponemos que conocemos a la región en la que está localizada la anomalía. En otras palabras, necesitamos hallar de la función φ tanto el dominio como su regla de correspondencia. Tenemos dos incógnitas. Por ello, recuperar dichas incógnitas de solo una medición no es posible como se ilustra a continuación.
Tomemos una medición V sobre S_2 y consideremos dos problemas (1)-(8) con diferentes regiones Ω_0 y $\tilde{\Omega}_0$. Claramente se definen con ellas el resto de las respectivas regiones. Procedamos de la forma en que se hizo en la demostración del resultado de unicidad anterior. Con los datos de Cauchy podemos hallar, en los respectivos problemas, las correspondientes fuentes que producen la medición V . Estas son diferentes ya que tienen diferente dominio.

En el caso en el que las corrientes que se genera alrededor del tumor tenga componente normal nula, suponiendo que el EEG está asociado a la presencia de ese tumor, podemos recuperar a la componente tangencial de la fuente a partir de:

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tau_0} = \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tau_0} + j^p \cdot \tau_0 \quad \text{en} \quad S_0.$$

donde τ_0 representa a un vector tangente a la superficie S_0.

En este caso, al suponer en la condición sobre los flujos de corriente (5) que $\varphi = j^p \cdot n_0 = 0$ tenemos que el potencial que produce la medición es único si suponemos que conocemos a la región Ω_0. De esta forma, se tiene la unicidad de las componentes tangenciales. En caso de que no se conozca la ubicación de la región Ω_0, entonces no se tiene unicidad y la idea de la demostración es la misma que para el caso presentado anteriormente en esta misma sección.

V. UNA ALTERNATIVA EN LA MODELACIÓN DE TUMORES. UN RESULTADO DE UNICIDAD

Otra forma de modelar la presencia de tumores es la siguiente: debido a que el tumor es silencio eléctrico, podemos considerar que la región ocupada por él corresponde a un dieléctrico ideal. De esto podemos considerar que el potencial u_1 sobre $\partial\Omega_0$ es nulo. Tenemos entonces el problema de valores en la frontera siguiente:

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_1, \tag{10}$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_2, \tag{11}$$

$$u_0 = u_1 \quad \text{en} \quad S_0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_0} = 0 \quad \text{en} \quad S_0, \tag{13}$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en} \quad S_1, \tag{14}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_1 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{en} \quad S_1, \tag{15}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_1} = 0 \quad \text{en} \quad S_2. \tag{16}$$

En este caso el problema se transforma en uno en el que se debe determinar la región ocupada por el tumor. Tenemos el siguiente resultado de unicidad:

Sean Ω_0 y $\tilde{\Omega}_0$ dos regiones convexas en la que se encuentran tumores que producen la misma medición V. Entonces $\Omega_0 = \tilde{\Omega}_0$.

La convexidad en el resultado anterior es una hipótesis permisible pues la cápsula de tejido fibroso tiene en muchas ocasiones una forma esférica.

V. DISCUSIÓN

El problema inverso de identificar anomalías en el cerebro ha sido modelado de dos formas, las cuales llevan tanto a resultados de unicidad como de no unicidad. Dicha modelación debe ser discutida tomando en cuenta la fisiología de las patologías que generan a las anomalías.

VI. CONCLUSIÓN

Se presentan resultados de unicidad para el caso de anomalías tales como tumores, edemas y calcificaciones. También se muestra que no es posible determinar la componente normal o la tangencial de la corriente de manera única si no sabemos en dónde está ubicada la fuente.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Sarvas J. "Basic Mathematical and Electromagnetic Concepts of the Biomagnetic Inverse Problem". Phys. Med. Biol., 1987; **32**(1): 11-22.
[2] Nuñez PL. "Electric Field of the Brain". Oxford Univ. Press, New York (USA), 1981.
[3] Fraguela A, Oliveros J and Morín M. "Mathematical Models in EEG inverse", in: Jiménez Pozo MA, Slavisa J, Bustamante J, Djorjevich S, Editors, Topics in the Theory of Approximation II (in Spanish). Scientific Texts, Autonomous University of Puebla (México), 2007; 73-95.
[4] Grave R, González S and Gómez CM. "The biophysical foundations of the localization of encephalogram generators in the brain. The application of a distribution-type model to the localization of epileptic foci (in spanish)". Rev. Neurol., 2004; **39**: 748-756.
[5] Fraguela A., Oliveros J., Morín M. "Inverse electroencephalography for cortical sources". Applied Numerical Mathematics, 2005; **55**(2): 191-203.
[6] Ueno S., Wakisako H. "Determination of the spatial distribution of abnormal EEG and MEG from current dipole in inhomogeneous volume conductor" Il Nuovo Cimento, 2004; **2**(D):558-566.